

Dans cette séance on va voir

- (i) la diagonalisation dans le cas complexe * $\rightarrow$ avec un exemple ∇
- (ii) la notion de $\rightarrow$ norme euclidienne
 $\hookrightarrow$ produit scalaire euclidien + propriétés

On a vu valeurs/vecteurs propres dans $\mathbb{R}$, et la diagonalisation aussi $\rightarrow$ mais ... et si l'on considère plutôt $\mathbb{C}$?

En fait on peut le faire et tous les résultats sont plutôt paris. $\rightsquigarrow$ On va le voir dans un exemple.

Exemple | Soit $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

Calculer valeurs/vecteurs propres | dans $\mathbb{C}$ $\rightsquigarrow$ et montrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ ∇

① Calcul de valeurs propres = racines de $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$

Dans ce cas

$$\begin{aligned}
 P_A(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 1/2 - \lambda & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 - \lambda \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{dev selon} \\ \text{2ème colonne}}}{=} (2 - \lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 1/2 - \lambda & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 - \lambda \end{pmatrix} \\
 &= (2 - \lambda) \cdot \left(\left(\frac{1}{2} - \lambda \right)^2 + \frac{3}{4} \right) = -(2 - \lambda) \cdot (\lambda^2 - \lambda + 1)
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lambda = 2$ est racine $\quad \Rightarrow$ il y a 2 racines de $\lambda^2 - \lambda + 1$

Comme $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, $P_A(\lambda)$ a deux racines complexes
discriminant de $\lambda^2 - \lambda + 1$

non réelles

$$\begin{aligned} & \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \\ & \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Alors

$$P_A(\lambda) = -(\lambda - 2) \left(\lambda - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right) \left(\lambda - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right) \Rightarrow \text{les valeurs propres complexes de } A \text{ sont } 2, \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}, \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

② Calcul des espaces propres $\rightarrow$ base de $\text{Ker}(A - \lambda I_3)$
pour chaque valeur propre λ

Si $\boxed{\lambda = 2}$

$$E_2 = \text{Ker}(A - 2I_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -3/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}$$

La F.E.R. de $A - 2I_3$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} -3/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & -3/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} -3/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow -\frac{2}{3}L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/\sqrt{3} \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alors

$$E_2 = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} : x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ou même $\mathbb{C} \dots$

Pour $\lambda = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$:

$$\underline{F}_{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}} = \text{Ker} \begin{pmatrix} \frac{i\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}+i) & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \leftarrow \text{calculé dans } \mathbb{C}^3 \nabla$$

dans $\mathbb{C} \nabla$

La FER de $A - \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right) \mathbb{I}_3$ est

$$\begin{pmatrix} \frac{i\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}+i) & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1 \leftarrow -\frac{i2}{\sqrt{3}}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{2}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+i)}L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{2}{\sqrt{3}}L_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -i \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui nous dit que

$$\underline{F}_{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \begin{array}{l} x_1 = ix_3 \\ x_2 = 0 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} ix_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{C} \right\} = \text{Vect} \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\sqrt{2}} \right\}$$

Pour $\lambda = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$:

$$\underline{F}_{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}} = \text{Ker} \begin{pmatrix} -\frac{i\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-i) & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \leftarrow \text{dans } \mathbb{C}^3 \nabla$$

La FER de $A - \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) \mathbb{I}_3$ est

dans $\mathbb{C} \nabla$

$$\begin{pmatrix} -\frac{i\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-i) & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow \frac{i2}{\sqrt{3}} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{2}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-i)} L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{2}{\sqrt{3}} L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & i \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\underline{F}_{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \begin{matrix} x_1 = -ix_3 \\ x_2 = 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -ix_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{C} \right\}$$

$$= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Abrs

$$P = \begin{bmatrix} \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \bar{v}_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & \frac{1-i\sqrt{3}}{2} & \\ & & \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & i & -i \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

méthode de Gauss-Jordan

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{i}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{i}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & i & -i \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & & \\ & \frac{1-i\sqrt{3}}{2} & \\ & & \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{i}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{i}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

□

Chapitre 12 | Produit scalaire et orthogonalité

60

(Probablement rappel de quelques définitions connues)

Déf. 12.1 (norme euclidienne)

$$\|\bar{x}\| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

"longueur" du vecteur

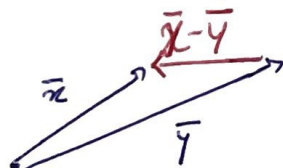
Déf. 12.2

(vecteur normalisé ou unitaire) si $\|\bar{x}\| = 1$, on dit que $\bar{x}$ est unitaire (ou normalisé).

Déf. 12.3 (distance) É.d. $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$, la distance entre

$\bar{x}$ et $\bar{y}$ est

$$\text{dist}(\bar{x}, \bar{y}) := \|\bar{x} - \bar{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$



(Prop. 13)

PROPRIÉTÉS DE LA NORME

(NOR.1) $\|\lambda \bar{x}\| = |\lambda| \cdot \|\bar{x}\|, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$

(NOR.2) $\|\bar{x}\| \geq 0, \forall \bar{x}$ et $\|\bar{x}\| = 0$ ssi $\bar{x} = \vec{0}$

(NOR.3) $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$ (inégalité triangulaire)

(Preuve) • $\|\lambda \bar{x}\| = \sqrt{(\lambda x_1)^2 + \dots + (\lambda x_n)^2} = \sqrt{\lambda^2 (x_1^2 + \dots + x_n^2)} = |\lambda| \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = |\lambda| \cdot \|\bar{x}\|$

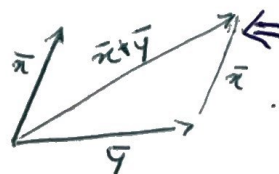
• $\|\bar{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \geq 0 \quad \forall$ et $0 = \|\bar{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \Leftrightarrow x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0$

$$\Leftrightarrow x_1^2 = \dots = x_n^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \dots = x_n = 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{x} = \vec{0}$$

la troisième sera démontrée après:



□

Déf. 12.6 | (produit scalaire euclidien)

$$\bar{x} \cdot \bar{y} := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \underbrace{\bar{x}^T \cdot \bar{y}}_{\text{produit de matrices}}$$

$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

idée:

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\| \cos(\theta)$$

angle entre $\bar{x}$ et $\bar{y}$

(Prep. 14)

PROPRIÉTÉS DU PRODUIT SCALAIRE

(PS.1) $\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{y} \cdot \bar{x}$

(PS.2) $\begin{cases} (\bar{x} + \lambda \bar{x}') \cdot \bar{y} = \bar{x} \cdot \bar{y} + \lambda \bar{x}' \cdot \bar{y} \\ \bar{x} \cdot (\bar{y} + \lambda \bar{y}') = \bar{x} \cdot \bar{y} + \lambda \bar{x} \cdot \bar{y}' \end{cases}$

(PS.3) $\bar{x} \cdot \bar{x} \geq 0$ et $\bar{x} \cdot \bar{x} = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = 0$

(NRM) $\|\bar{x}\| = \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}}$

(CS) $|\bar{x} \cdot \bar{y}| \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|$

(Preuve) (PS.1) $\bar{x} \cdot \bar{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = y_1 x_1 + \dots + y_n x_n = \bar{y} \cdot \bar{x}$

(PS.2) $(\bar{x} + \lambda \bar{x}') \cdot \bar{y} = (x_1 + \lambda x'_1) y_1 + \dots + (x_n + \lambda x'_n) y_n = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n + \lambda (x'_1 y_1 + \dots + x'_n y_n) = \bar{x} \cdot \bar{y} + \lambda \bar{x}' \cdot \bar{y}$

et l'autre est pareille.

(NRM) $\|\bar{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}}$ et donc (NOR.3) implique (PS.3).

(CS) $0 \leq \|\bar{x} + t\bar{y}\|^2 = (\bar{x} + t\bar{y}) \cdot (\bar{x} + t\bar{y}) = \underbrace{\bar{x} \cdot (\bar{x} + t\bar{y}) + t\bar{y} \cdot (\bar{x} + t\bar{y})}_{(PS.2)} = \bar{x} \cdot \bar{x} + t\bar{x} \cdot \bar{y} + t\bar{y} \cdot \bar{x} + t^2 \bar{y} \cdot \bar{y}$

$\stackrel{(PS.1)}{=} \bar{x} \cdot \bar{x} + 2t\bar{x} \cdot \bar{y} + t^2 \bar{y} \cdot \bar{y} \Rightarrow 0 \geq b^2 - 4ac = 4(\bar{x} \cdot \bar{y})^2 - 4(\bar{y} \cdot \bar{y})(\bar{x} \cdot \bar{x})$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 $(PS.1)$ c b a , $\forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow (\bar{x} \cdot \bar{y})^2 \leq (\bar{x} \cdot \bar{x}) \cdot (\bar{y} \cdot \bar{y}) = \|\bar{x}\|^2 \cdot \|\bar{y}\|^2 \Rightarrow |\bar{x} \cdot \bar{y}| \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\| . \square$